

DOI: 10.37988/1811-153X_2024_2_40

[В.Ю. Лапушко](#)¹,аспирант кафедры ортопедической
и общей стоматологии[Д.В. Сорокин](#)¹,д.м.н., профессор кафедры ортопедической
и общей стоматологии[С.С. Абакарова](#)¹,к.м.н., доцент кафедры ортопедической
и общей стоматологии[А.В. Стародубова](#)²,

к.м.н., стоматолог-терапевт

[Д.С. Абакарова](#)¹,к.м.н., доцент кафедры общей
и хирургической стоматологии[Т.Н. Новоземцева](#)¹,д.м.н., профессор кафедры
терапевтической стоматологии[И.В. Крутер](#)¹,к.м.н., доцент кафедры общей
и хирургической стоматологии¹ РМАНПО, 125993, Москва, Россия² ЦНИИСиЧЛХ, 119021, Москва, Россия

Математическое обоснование фиксации и устойчивости несъемных протезов на имплантатах

Аннотация. Установлено, что фиксация и устойчивость несъемных протезов на имплантатах взаимосвязаны со степенью наклона стенок опорных абатментов. С помощью математического анализа определена зависимость угла наклона стенки абатмента от его высоты для достижения оптимальной пассивной припасовки, проведено теоретическое обоснование устойчивости коронки от опрокидывания в зависимости от угла наклона стенок абатментов, а также их поперечной ширины у основания и высоты.

Ключевые слова: дентальная имплантация, пассивная припасовка несъемного протеза, угол наклона стенок абатмента, фиксация и устойчивость несъемных протезов

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:

Лапушко В.Ю., Сорокин Д.В., Абакарова С.С., Стародубова А.В., Абакарова Д.С., Новоземцева Т.Н., Крутер И.В. Математическое обоснование фиксации и устойчивости несъемных протезов на имплантатах. — *Клиническая стоматология*. — 2024; 27 (2): 40—44. DOI: 10.37988/1811-153X_2024_2_40

[V.Yu. Lapushko](#)¹,postgraduate at the Prosthodontics and
general dentistry Department[D.V. Sorokin](#)¹,PhD in Medical Sciences, professor of the
Prosthodontics and general dentistry
Department[S.S. Abakarova](#)¹,PhD in Medical sciences, associate professor
of the Prosthodontics and general dentistry
Department[A.V. Starodubova](#)²,

PhD in Medical Sciences, dentist

[D.S. Abakarova](#)¹,PhD in Medical Sciences, associate professor
of the General and surgical dentistry
Department[T.N. Novozemtseva](#)¹,PhD in Medical Sciences, full professor of the
Therapeutic dentistry Department[I.V. Kruter](#)¹PhD in Medical Sciences, associate professor
of the General and surgical dentistry
Department¹ Russian Medical Academy
of Continuous Professional Education,
125993, Moscow, Russia² Central Research Institute
of Dental and Maxillofacial Surgery,
119021, Moscow, Russia

Mathematical substantiation of fixation and stability of fixed prostheses on implants

Annotation. It was found that the fixation and stability of fixed prostheses on implants are interrelated with the degree of inclination of the walls of the supporting abutments. Using mathematical analysis, the dependence of the angle of inclination of the abutment wall on its height was determined in order to achieve optimal passive packing, a theoretical justification of the stability of the crown from tipping was carried out depending on the angle of inclination of the abutment walls, their transverse width at the base and height.

Key words: dental implantation, passive packing of a non-removable prosthesis, angle of inclination of the walls of the abutment, fixation and stability of non-removable prostheses

FOR CITATION:

Lapushko V.Yu., Sorokin D.V., Abakarova S.S., Starodubova A.V., Abakarova D.S., Novozemtseva T.N., Kruter I.V. Mathematical substantiation of fixation and stability of fixed prostheses on implants. *Clinical Dentistry (Russia)*. 2024; 27 (2): 40—44 (In Russian). DOI: 10.37988/1811-153X_2024_2_40

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на широкое распространение несъемных протезов с опорой на имплантаты, на практике врачи-стоматологи сталкиваются с такими осложнениями, как скол керамической облицовки коронки, расцементировка искусственной коронки, перелом абатмента имплантата и др. (рис. 1).

В настоящее время в зуботехнических лабораториях при изготовлении индивидуальных абатментов методом CAD/CAM стандартно проектируются абатменты с углом наклона стенок 2–3°, а при индивидуальной фрезеровке до 10°. При этом нет четких критериев использования величины угла наклона стенок абатментов в зависимости от их высоты и диаметра. Многие авторы отмечают, что важную роль в профилактике указанных выше осложнений и оптимальном распределении функциональной нагрузки на опору имплантата играет степень угла наклона стенок абатментов [1–5].

Ряд специалистов считает, что оптимальная степень наклона стенок абатментов необходима для улучшения пассивной припасовки — она играет определяющую роль в фиксации и устойчивости несъемного протеза с цементной фиксацией [6–10].

Вместе с тем мнения авторов о степени угла наклона стенок абатментов для обеспечения качественной припасовки несъемного протеза, его прочности, устойчивости и фиксации значительно различаются [11–18].

Проведенное нами ранее микроскопическое исследование точности прилегания каркасов несъемных протезов на имплантатах показало влияние угла наклона стенок абатментов на точность соответствия каркасов и опор, а также на пассивную припасовку в зависимости от высоты абатментов и числа опор в конструкции, что непосредственно влияет на фиксацию и устойчивость несъемных протезов. Так, степень угла наклона стенок абатментов не влияла на пассивную припасовку при их высоте 3 мм до 2 опор в конструкции, но при высоте 5 мм и 3 опор требуется угол наклона его стенки более 2°. При высоте абатмента 7 мм в несъемной конструкции необходим угол наклона более 4° для достижения пассивной припасовки, а при высоте абатментов 9 мм — более 8° [6].

Выявленная в процессе лабораторного исследования зависимость и полученные данные о величине зазоров в процессе припасовки каркасов были положены в основу обоснования фиксации и устойчивости несъемных протезов на дентальных имплантатах математическим методом.

Цель исследования — определить влияние степени угла наклона стенок абатментов, его диаметра и высоты на фиксацию и устойчивость несъемных протезов на имплантатах для повышения качества их применения в ортопедической стоматологии.



Рис. 1. Осложнения при ортопедическом лечении на дентальных имплантатах: А — фрагменты поломанных абатментов с истонченными до 0,1 мкм стенками; В — абатменты с отломанной коронковой частью и расцементированные металлокерамические коронки
Fig. 1. Complications during orthopedic treatment on dental implants: A — fragments of broken abutments with walls thinned to 0.1 microns; B — abutments with a broken crown part and cemented cermet crowns

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для достижения цели данного исследования мы использовали метод математического анализа (метод наименьших квадратов для аппроксимации полиномами n -й степени), для этого была написана программа на языке MATLAB, а также выведены математические формулы для определения устойчивости.

РЕЗУЛЬТАТЫ

В процессе математического анализа была выражена зависимость между изменяемыми в ходе эксперимента значениями переменной x — высоты абатмента и эмпирических значений эксперимента y — угол наклона стенки абатмента в виде аналитически выраженной функциональной зависимости следующего вида: $y = f(x; a_1, a_2, \dots, a_m)$, где a_1, a_2, \dots, a_m — параметры значений величины зазоров.

Поиск функциональной зависимости между переменными x и y начинается с выбора функции $f(x)$ (линейная, степенная, показательная, логарифмическая и т.п.), которая наилучшим образом подходит для описания рассматриваемой зависимости. Данная функция определяется наилучшими значениями параметров $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, т.е. наилучшими показателями величин зазоров при припасовке каркаса. Рассмотрим более детально метод наименьших квадратов для аппроксимации полиномами n -й степени.

Аппроксимация полиномом n -й степени

Пусть дан полином вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k = y_i$, где $k < n$, а n — длина отрезка известных нам значений. Необходимо найти такие параметры a_i , чтобы сумма квадратов отклонений y_i от $f(y)$ в точках x была минимальной, т.е.:

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_k))^2 \rightarrow \min.$$

Задача сводится к решению следующей системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} a_0 n & a_1 \sum_{i=1}^n x_i & \dots & a_k \sum_{i=1}^n x_i^k \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i & a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 & \dots & a_k \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^k & a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} & \dots & a_k \sum_{i=1}^n x_i^{2k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^k y_i \end{bmatrix}.$$

Критерием определения качества полученных уравнений регрессии, т.е. соответствие аппроксимирующих функций реальным статистическим данным, является коэффициент детерминации R^2 .

В общем виде коэффициент детерминации можно определить следующим образом:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}, \quad (1)$$

где \bar{y} — среднее и \hat{y} — модельные значения зависимой переменной.

Смысл коэффициента детерминации можно пояснить следующим образом. Отклонение наблюдаемых значений y от среднего значения зависимой переменной представим как:

$$y - \bar{y} = \hat{y} - \bar{y} + y - \hat{y}. \quad (2)$$

Тогда первая разность в правой части уравнения (2) показывает отклонение модельного значения линии регрессии от \bar{y} , а вторая разность — отклонение наблюдаемого значения от модельного. Если возвести обе части (2) в квадрат и просуммировать по всей выборке, будем иметь:

$$\sum (y - \bar{y})^2 = \sum (\hat{y} - \bar{y})^2 + \sum (y - \hat{y})^2 \quad (3)$$

и, разделив обе части (3) на левую часть, получим

$$1 = \frac{\sum (\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2} + \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}. \quad (4)$$

В выражениях (3) и (4) $\sum (y - \bar{y})^2$ представляет общую (полную) сумму квадратов, которая может интерпретироваться как мера общего разброса переменной y относительно \bar{y} , $\sum (\hat{y} - \bar{y})^2$ — объяснения сумма квадратов или мера разброса, объяснимого уравнением регрессии, а $\sum (y - \hat{y})^2$ — остаточная сумма квадратов, необъясненный уравнением регрессии разброс наблюдаемых значений вокруг линии регрессии. Отношение объясненной суммы квадратов к общей сумме квадратов отклонений от среднего назвали коэффициентом детерминации

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}, \quad (5)$$

который определяет долю дисперсии зависимой переменной, объясненную регрессией y на x . Из соотношения (5) следует, что $0 \leq R^2 \leq 1$.

Из решения данных уравнений делаем вывод: чем теснее линейная связь между y и x , тем ближе коэффициент детерминации к единице, чем это связь слабее, тем R^2 ближе к нулю. На основании рассмотренных уравнений была написана программа на языке MATLAB для аппроксимации экспериментальных данных полиномами n -й степени с вычислением их среднеквадратичного отклонения и коэффициентов детерминации.

В ходе работы экспериментальные данные были аппроксимированы полиномами 2-й и 3-й степени. В виду того что для полинома 3-й степени коэффициент детерминации принимает значение, равное 1, в то время как для полинома 2-й степени значение коэффициента детерминации равно 0,991, полином 3-й степени точнее характеризует зависимость угла наклона стенок абатмента от его высоты.

В ходе математических вычислений было получено следующее уравнение 3-й степени, аппроксимирующее данные эксперимента:

$$y = 0,0208x^3 - 0,1875x^2 + 1,4792x - 3,3125,$$

где x — высота абатмента, y — угол наклона стенки абатмента, решением которого получился график зависимости степени угла наклона стенки абатмента от его высоты (рис. 2).

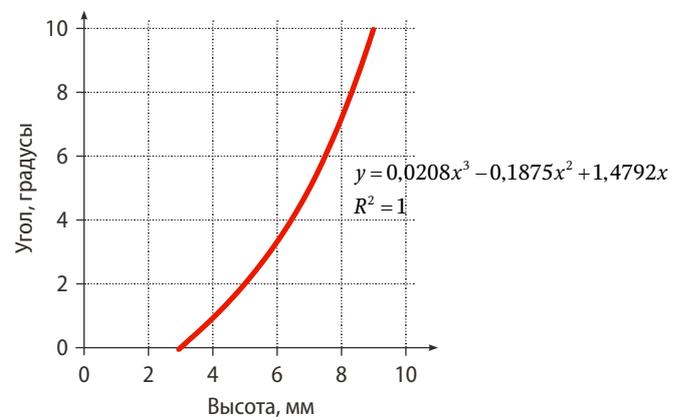


Рис. 2. Зависимость степени угла наклона стенки абатмента от его высоты для достижения оптимальной пассивной припасовки несъемного протеза

Fig. 2. The dependence of the degree of angle of inclination of the abutment wall on its height to achieve optimal passive packing of the non-removable prosthesis

Таким образом, путем математического анализа мы определили зависимость угла наклона стенки абатмента от его высоты для достижения пассивной припасовки несъемных протезов, которая непосредственно влияет на фиксацию и устойчивость несъемного протеза.

На основании этого проведено теоретическое обоснование устойчивости коронки от опрокидывания в зависимости от угла наклона стенок абатментов, их поперечной ширины у основания и высоты.

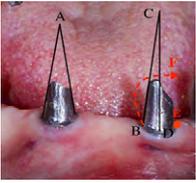


Рис. 3. Факторы, влияющие на сопротивление вращения протеза: линия $\angle A$ — это угол конвергенции двух противоположных стенок абатмента; линия BC — дистальная стенка абатмента, которая препятствует вращению протеза вокруг оси абатмента; линия CD — центральная ось зуба; $\angle BCD$ иллюстрирует степень угла наклона одиночной стенки абатмента; дуга F — радиус опрокидывания протеза; точка E — ось вращения

Fig. 3. Factors affecting the rotational resistance of the prosthesis: line $\angle A$ is the angle of convergence of two opposite walls of the abutment; line BC is the distal wall of the abutment, which prevents the prosthesis from rotating around the axis of the abutment; line CD is the central axis of the tooth; $\angle BCD$ illustrates the degree of angle of inclination of a single wall of the abutment; arc F is the radius of overturning of the prosthesis; point E is the axis of rotation

Определение устойчивости несъемных протезов

Коронки и мостовидные протезы на абатментах имеют ось вращения, которая расположена на границе протеза и уступа абатмента. Считается, что вертикальная стенка напротив оси вращения препятствует повороту протеза, поэтому степень угла наклона стенки абатмента играет важную роль в устойчивости протеза на абатменте. Как только степень угла наклона стенки абатмента будет превышена, вся вращательная нагрузка будет передана на фиксирующий цемент между протезом и абатментом. Также на сопротивление вращению протеза влияет площадь абатмента. По мере увеличения степени угла наклона стенки площадь поверхности абатмента уменьшается, в результате чего уменьшается и площадь поверхности фиксирующего цемента. Поэтому в устойчивости протеза важную роль играют высота абатмента, ширина его основания и угол наклона стенок абатмента (рис. 3).

Устойчивость протеза на абатменте к сопротивлению вращения вокруг оси зависит от нижеперечисленных факторов (рис. 4):

- поперечная ширина абатмента у основания AD ;
- высота абатмента — h ;
- степень угла наклона стенки абатмента — α .

Вращение коронки (опрокидывание) происходит относительно точки A . Тогда условие опрокидывания выглядит следующим образом: $AC \leq AD$.

В этом случае коронка будет опрокидываться с опорного абатмента. Из этого следует, что условие устойчивого положения коронки на зубе выглядит так: $AC > AD$.

Чтобы рассчитать формулу устойчивости коронки на абатменте, следует найти AC . Введем в формулу значение T , где $T = AD$. Рассмотрим $\triangle ACE$. CE — высота, значит $\angle AEC = 90^\circ$.

$\triangle ACE$ — прямоугольный, по определению прямоугольного треугольника, AC — гипотенуза, CE , AE — катеты. Из теоремы Пифагора следует, что $AC^2 = CE^2 + AE^2$, $CE = h$ — высота зуба, найдем AE : $AE = AD - ED$, где $AD = T$ — ширина зуба.

Найдем ED . Рассмотрим $\triangle CED$ — прямоугольный, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{ED}{EC}$ (по определению тангенса) и $ED = EC \operatorname{tg} \alpha$, где

$EC = h$ — высота зуба. $AE = T - h \operatorname{tg} \alpha$, из этого следует, что $AC = \sqrt{h^2 + (T - h \operatorname{tg} \alpha)^2}$, тогда для определения устойчивого положения коронки на абатменте при $AC > AD$ получаем $\sqrt{h^2 + (T - h \operatorname{tg} \alpha)^2} > T$ и:

$$\sqrt{h^2 + (T - h \operatorname{tg} \alpha)^2} - T > 0. \quad (6)$$

Выполнение формулы (6) обеспечивает устойчивость коронки на абатменте имплантата от опрокидывания, что обосновывает зависимость поперечного сечения абатмента от высоты самого абатмента и влияние этого на устойчивость несъемного протеза.

Таким образом, мы можем сформулировать основные выводы о зависимости между диаметром абатмента у основания T , углом наклона стенки абатмента α и высотой абатмента h :

- 1) при постоянных значениях диаметра абатментов и угла наклона его стенок устойчивость несъемного протеза увеличивается с увеличением высоты абатмента (если T и α — постоянны, то устойчивость увеличивается с увеличением h);
- 2) при постоянных значениях угла наклона стенок абатментов и его высоты устойчивость несъемного протеза увеличивается с уменьшением диаметра абатментов у основания (если h и α — постоянны, то устойчивость увеличивается с уменьшением T);
- 3) при постоянных значениях диаметра абатментов и его высоты устойчивость несъемного протеза увеличивается с уменьшением угла наклона стенок абатментов (если T и h постоянны, то устойчивость увеличивается с уменьшением α).

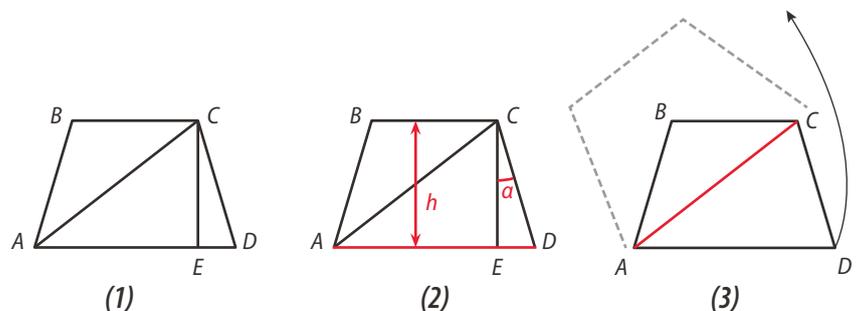


Рис. 4. Факторы, влияющие на устойчивость протеза: 1) поперечное сечение абатмента; 2) основные факторы, определяющие устойчивость коронки; 3) путь опрокидывания коронки относительно точки A

Fig. 4. Factors influencing the stability of the prosthesis: 1) the cross section of the abutment; 2) the main factors determining the stability of the crown; 3) the way the crown tilts relative to point A

Таким образом, при увеличении до критических значений угла наклона стенок абатментов устойчивость будет теряться, вследствие чего может быть нарушена фиксация протеза.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В целом, проведенное исследование показало, что основными факторами, влияющими на фиксацию и устойчивость несъемных протезов на имплантатах, являются степень угла наклона стенок абатментов, которая непосредственно влияет на степень припасовки. При несоблюдении оптимальных значений углов наклона стенок

абатментов и баланса, обеспечивающего устойчивость конструкции от опрокидывания (диаметр абатмента у основания, угол наклона его стенки и высота), при увеличенной жевательной нагрузке риск возникновения осложнений, выражающихся в расцементировках и поломках абатментов, увеличивается.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие конфликта интересов.

Поступила: 12.03.2024 **Принята в печать:** 06.05.2024

Conflict of interests. The authors declare no conflict of interests.
Received: 12.03.2024 **Accepted:** 06.05.2024

ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES:

- Mosharraf R., Abbasi M., Givehchian P. The effect of abutment angulation and crown material compositions on stress distribution in 3-unit fixed implant-supported prostheses: A finite element analysis. — *Int J Dent.* — 2022; 2022: 4451810. [PMID: 36065400](#)
- Strauss F.J., Siegenthaler M., Hämmerle C.H.F., Sailer I., Jung R.E., Thoma D.S. Restorative angle of zirconia restorations cemented on non-original titanium bases influences the initial marginal bone loss: 5-year results of a prospective cohort study. — *Clin Oral Implants Res.* — 2022; 33 (7): 745-756. [PMID: 35570366](#)
- de Aguiar Vilela Júnior R., Aranha L.C., Elias C.N., Martinez E.F. In vitro analysis of prosthetic abutment and angulable frictional implant interface adaptation: Mechanical and microbiological study. — *J Biomech.* — 2021; 128: 110733. [PMID: 34530293](#)
- López-Jarana P., Díaz-Castro C.M., Falcão A., Ríos-Carrasco B., Fernandez-Palacín A., Ríos-Santos J.V., Herrero-Climent M. Is it possible to monitor implant stability on a prosthetic abutment? An in vitro resonance frequency analysis. — *Int J Environ Res Public Health.* — 2020; 17 (11): 4073. [PMID: 32521612](#)
- Lee M.Y., Heo S.J., Park E.J., Park J.M. Comparative study on stress distribution around internal tapered connection implants according to fit of cement- and screw-retained prostheses. — *J Adv Prosthodont.* — 2013; 5 (3): 312-8. [PMID: 24049573](#)
- Абакаров С.И., Сорокин Д.В., Лапушко В.Ю., Никифорова К.И. Анализ качества прилегания металлических каркасов протезов на имплантатах в зависимости от конусности абатментов. — *Стоматология.* — 2021; 6: 56-60.
[Abakarov S.I., Sorokin D.V., Lapushko V.Y., Nikiforova K.I. Analysis of the fit quality of the metal frames on implants depending on the abutment taper. — *Stomatology.* — 2021; 6: 56-60 (In Russian).] [eLibrary ID: 47402457](#)
- Safari S., Hosseini Ghavam F., Amini P., Yaghmaei K. Effects of abutment diameter, luting agent type, and re-cementation on the retention of implant-supported CAD/CAM metal copings over short abutments. — *J Adv Prosthodont.* — 2018; 10 (1): 1-7. [PMID: 29503708](#)
- Mishra K., Singh P., Noorani M.K., Adarsh K., Kalburgi M.N., Malik M. Evaluation of change in implant abutment after teeth surface modifications. — *Bioinformation.* — 2021; 17 (1): 157-161. [PMID: 34393431](#)
- Rosas J., Mayta-Tovalino F., Malpartida-Carrillo V., Degregori A.M., Mendoza R., Guerrero M.E. Effect of abutment geometry and luting agents on the vertical marginal discrepancy of cast copings on implant abutments: An in vitro study. — *Int J Dent.* — 2021; 2021: 9950972. [PMID: 34239569](#)
- Ali A.O., Kelly J.R., Zandparsa R. The influence of different convergence angles and resin cements on the retention of zirconia copings. — *J Prosthodont.* — 2012; 21 (8): 614-21. [PMID: 22823334](#)
- Rodriguez L.C., Saba J.N., Meyer C.A., Chung K.H., Wadhvani C., Rodrigues D.C. A finite element analysis of novel vented dental abutment geometries for cement-retained crown restorations. — *Clin Exp Dent Res.* — 2016; 2 (2): 136-145. [PMID: 29744160](#)
- Rödiger M., Rinke S., Ehret-Kleinau F., Pohlmeier F., Lange K., Bürgers R., Gersdorff N. Evaluation of removal forces of implant-supported zirconia copings depending on abutment geometry, luting agent and cleaning method during re-cementation. — *J Adv Prosthodont.* — 2014; 6 (3): 233-40. [PMID: 25006388](#)
- Yoon S.S., Cheong C., Preisser J. Jr, Jun S., Chang B.M., Wright R.F. Measurement of total occlusal convergence of 3 different tooth preparations in 4 different planes by dental students. — *J Prosthet Dent.* — 2014; 112 (2): 285-92. [PMID: 24726595](#)
- Rathod A., Jalaluddin M., Shrinivas, Devadiga T.J., Jha S., Al-zahrani K.M. Geometry of implant abutment surface improving cement effectiveness: An in vitro study. — *J Pharm Bioallied Sci.* — 2021; 13 (Suppl 2): S1093-S1097. [PMID: 35017936](#)
- Tiu J., Al-Amleh B., Waddell J.N., Duncan W.J. Clinical tooth preparations and associated measuring methods: a systematic review. — *J Prosthet Dent.* — 2015; 113 (3): 175-84. [PMID: 25449611](#)
- Choi K.H., Son K., Lee D.H., Lee K.B. Influence of abutment height and convergence angle on the retrievability of cement-retained implant prostheses with a lingual slot. — *J Adv Prosthodont.* — 2018; 10 (5): 381-387. [PMID: 30370030](#)
- Zhao L., Weigl P., Wu Y., Xu Y. In vitro study of bond strength between abutments with different degrees of convergence and crowns by pre-bonding method. — *Int J Oral Maxillofac Implants.* — 2019; 34 (1): 25-30. [PMID: 30695084](#)
- Schriwer C., Gjerdet N.R., Arola D., Øilo M. The effect of preparation taper on the resistance to fracture of monolithic zirconia crowns. — *Dent Mater.* — 2021; 37 (8): e427-e434. [PMID: 33910755](#)